

Algoritmos e Estruturas de Dados II

Capítulo da Aula 7: Árvores AVL

Prof. Aléssio Miranda Júnior
alessio@cefetmg.br
CEFET-MG - Campus Timóteo

Fevereiro de 2026

1. O Problema da BST "Degenerada"

Como vimos, se inserirmos 1, 2, 3, 4 em uma BST, ela vira uma Linha Reta com altura N . A busca degrada para $O(N)$. Para resolver isso, G.M. Adelson-Velsky e E.M. Landis criaram, em 1962, a primeira árvore balanceada auto-ajustável.

2. Invariante da AVL

Uma BST é uma AVL se, **para todo nó**, a diferença de altura entre a subárvore esquerda e a direita (Fator de Balanceamento) é no máximo 1.

$$FB(\text{nó}) = h(\text{direita}) - h(\text{esquerda})$$

$$FB \in \{-1, 0, +1\}$$

Se, após uma inserção ou remoção, algum nó ficar com $|FB| > 1$, precisamos consertá-lo.

3. Implementação: Calculando Altura

Diferente da BST comum, cada nó da AVL precisa armazenar sua própria altura para evitar recalculá-la recursivamente (o que seria $O(N)$).

```
class Node {
    int key, height;
    Node left, right;

    Node(int d) {
        key = d;
        height = 1; // No novo e folha, altura 1
    }
}

int height(Node N) {
```

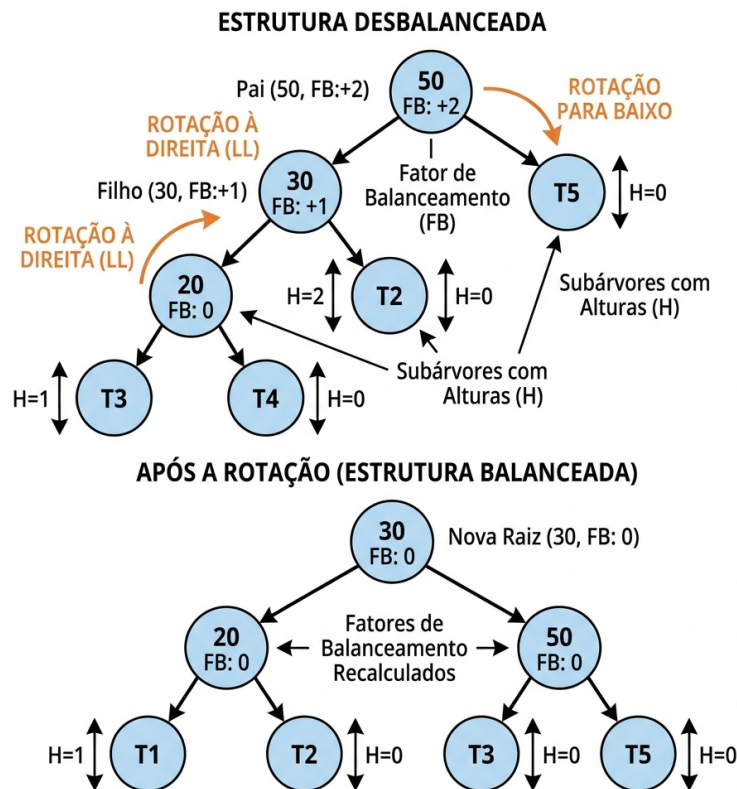


Figure 1: Fator de balanceamento: diferença de altura entre subárvores; deve estar em $\{-1, 0, 1\}$.

```

    if (N == null) return 0;
    return N.height;
}

int getBalance(Node N) {
    if (N == null) return 0;
    return height(N.right) - height(N.left);
}

```

4. A Engenharia Física das Rotações

As rotações formam o núcleo mecânico corretivo absoluto de contenção de falhas nas árvores balanceadas AVL. Elas consistem centralmente em transações cirúrgicas limitadas de **re-roteamento estrito de ponteiros físicos** em tempo puramente constante $O(1)$. A genialidade arquitetural das rotações reside exatamente na preservação irretocável da matriz das ordens primárias da BST (*Esquerda < Raiz < Direita*) enquanto que, num passe paralelo de engenharia invisível, ela "traciona e encurta" as longas correntes excedentes, içando chaves presas da periferia dos caminhos engasgados para nivelá-las no núcleo denso da raiz.

4.1. Torção Simples à Direita (Right Rotate)

Ativada violentamente como barreira salva-vidas natural assim que o limite abissal de ruptura do Fator de Balanceamento acusa a medida impeditiva de **-2** alinhada cegamente às pontas gravitacionais esquerdas. O ramo engorda descontrolado ao nível da "Reta Clássica da Esquerda", exigindo torção da paisagem caindo abruptamente na junção extremamente frágil de Esquerda-Esquerda (LL).

ROTAÇÃO SIMPLES À DIREITA (Torção Simples à Direita)

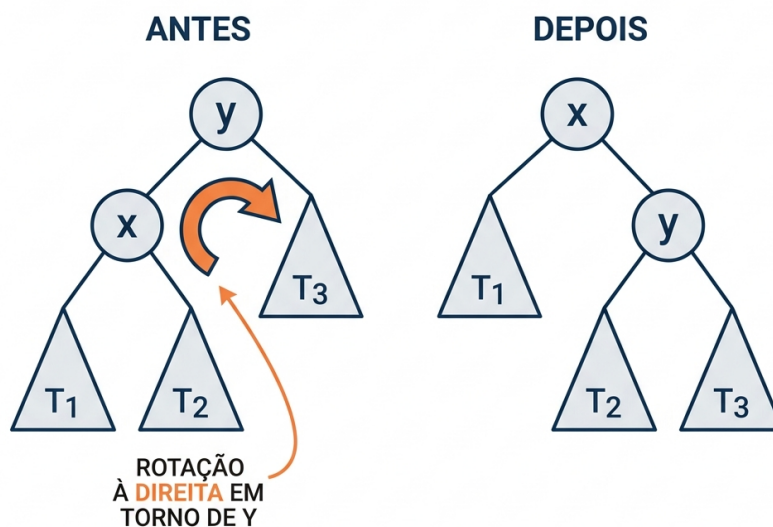


Figure 2: Rotação simples à direita: o nó x assume o topo e o antigo pai y escorrega para a direita abrigoando a subárvore intermediária.

Código Java:

```
Node rightRotate(Node y) {
    // Definindo variaveis
    Node x = y.left;
    Node T2 = x.right;

    // A Rotacao em si (troca de ponteiros)
    x.right = y;
    y.left = T2;

    // Atualiza alturas (primeiro y, que desceu, depois x)
    y.height = Math.max(height(y.left), height(y.right)) + 1;
    x.height = Math.max(height(x.left), height(x.right)) + 1;
}
```

```
// Nova raiz
return x;
}
```

LR DOUBLE ROTATION IN AN AVL TREE

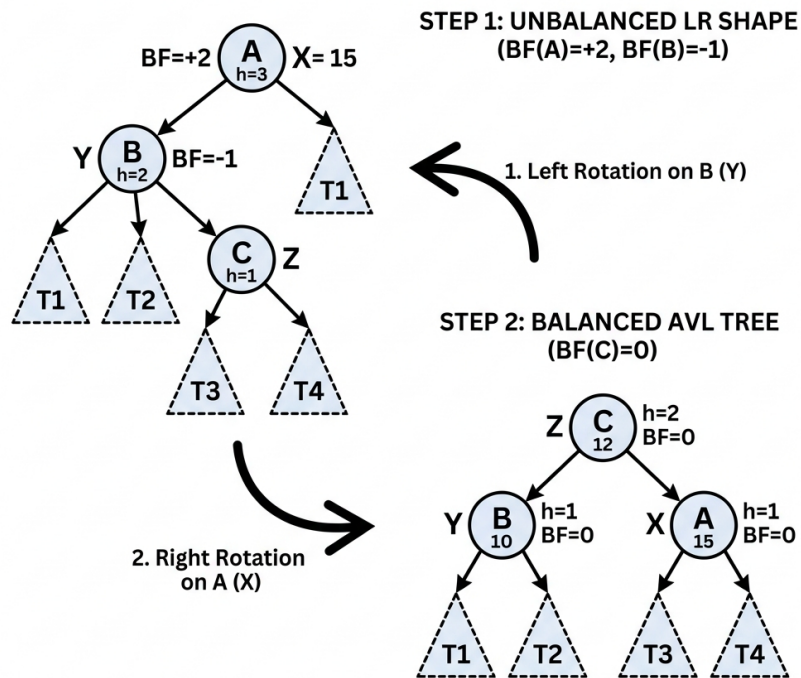


Figure 3: Rotação dupla (LR ou RL): primeiro rotacionar o filho, depois o nó desbalanceado.

4.2. Torção Simples à Esquerda (Left Rotate)

Atua espelhadamente comutando e estourando num movimento retrátil inverso o atrito reverso engasgado pela massa morta gerando uma sobrepesagem alinhada extrema na fronteira marginal da "Reta Clássica da Direita" Direita-Direita (RR) onde o fator afrouxa violento batendo +2.

```
Node leftRotate(Node x) {
    Node y = x.right;
    Node T2 = y.left;
```

```
    y.left = x;
    x.right = T2;
```

```
    x.height = Math.max(height(x.left), height(x.right)) + 1;
```

```

    y.height = Math.max(height(y.left), height(y.right)) + 1;

    return y;
}

```

4.3. O Desafio Estrutural: A Torção Dupla Espiral

Quando a carga maciça excedente do balanceamento cresce e enverga entranhas adentro do nó (originando o colapso interno tortuoso estrutural cravado em diagramações como "O Joelho" ou "Zig-Zag"), a mera aplicação de reconfigurações brutas através de engates de rotação primária simples fracassa implacavelmente. Executá-la cegamente simplesmente capotará o nó "joelho" inteiro escorrendo intocável pelas fendas transferindo mecanicamente todo o mesmo estrago matemático e isolando os pesos para as exatas frentes cegas opostas. O abalo estrutural cobra compulsoriamente a imersão em abordagem pesada engajada em dois curtos-circuitos sucessivos.

O Estágio Abstrato de Transição Limpa (Joelho LR ou RL): 1. Inicia-se estalando uma rotação fantasma pontual preventiva unicamente isolada sob os trâmites reclusos de atuação na esfera do galho filho desgrenhado inferior; e por fim, esta manobra exógena silenciosa isoladora sequer mitiga a dor na sobrecarga imposta que paralisa o Pai superior corrompido globalmente ($FB \pm 2$). O propósito existencial exclusivo desta operação cega é meramente esticar topologicamente os fios elásticos e quebrar de dentro pra fora o "percurso Joelho interno enjambrado" transmutando sua complexidade abstrata atritante linearizando totalmente o canal físico recém estourado, o subvertendo num quadro tratável passivo de Reta Externa pura controlada em alinhamento cravado (LL ou RR). 2. Munido arquiteturalmente em mãos de um tubo recém destorcido endireitado fisicamente das pontas de bordas cegas, processa-se em resposta integral da máquina executora a clássica e velha força mecânica matriz padrão invocando a imponente torção suprema final do bloco rotacional Simples inteiriço achatando a base pesada, curando irrevogavelmente o percurso degradado liquidando com a avaria assintótica devolvendo a harmonia visual em profundidade para as entranhas da base do balanceamento.

5. Inserção Completa

```

Node insert(Node node, int key) {
    // 1. Insercao normal de BST
    if (node == null) return (new Node(key));

    if (key < node.key)
        node.left = insert(node.left, key);
    else if (key > node.key)
        node.right = insert(node.right, key);
    else
        return node; // Chaves duplicadas nao permitidas

    // 2. Atualiza altura do ancestral
    node.height = 1 + Math.max(height(node.left), height(node.right));
}

```

PERFECTLY BALANCED AVL TREE
(Symmetrical Structure, Height = 4)

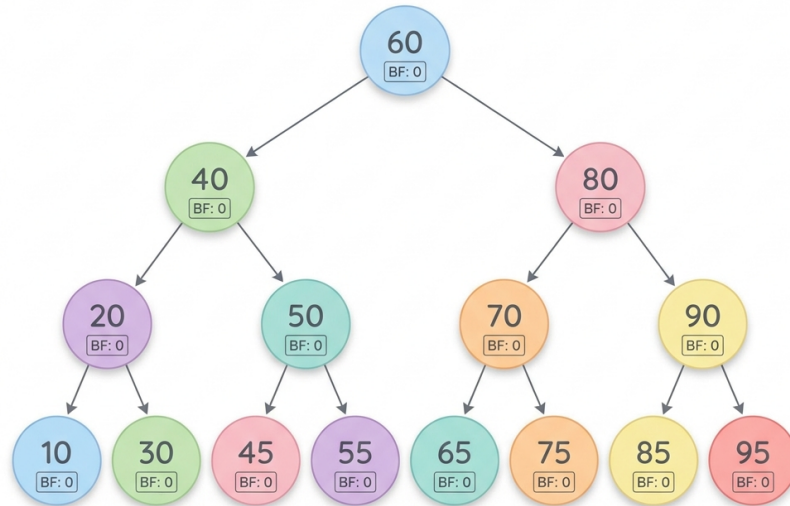


Figure 4: Árvore AVL balanceada: todas as subárvores com FB em $\{-1, 0, 1\}$.

```
// 3. Verifica Balanceamento
int balance = getBalance(node);

// 4. Aplica Rotacoes se necessario

// Caso Esquerda-Esquerda
if (balance < -1 && key < node.left.key)
    return rightRotate(node);

// Caso Direita-Direita
if (balance > 1 && key > node.right.key)
    return leftRotate(node);

// Caso Esquerda-Direita (Joelho)
if (balance < -1 && key > node.left.key) {
    node.left = leftRotate(node.left);
    return rightRotate(node);
}

// Caso Direita-Esquerda (Joelho)
```

```
    if (balance > 1 && key < node.right.key) {
        node.right = rightRotate(node.right);
        return leftRotate(node);
    }

    return node;
}
```

6. O Duelo de Titãs: AVL vs Árvore Rubro-Negra

Embora as compilações literárias estáticas genéricas atrelem e engavetem simploriamente ambas sob os auspícios protetores divinos globais base da limitação inviolada eterna constante fechada de buscas contíguas avaliada nos imperativos globais base limites de $O(\log N)$, observamos fraturas na fenda das divergências tectônicas profundas batendo abismalmente frente aos trilhos dos bastidores brutos em Arquitetura de Servidor Físico pesando as engrenagens absolutas frente à escolha técnica cruel de quando invocar o torque das AVL ou abdicar à passividade absorvedora das Rubro-Negras.

O Xeque-Mate

A grande campeã analítica implacável absoluta engessada universal **AVL** desponta reinando solitária hegemonicamente insuperável apenas regendo em reinos restritamente enjaulados estáticos de topologia puristas focados passivamente enclausurados base *Read-Heavy* (ex: Dicionários Base Fechados Fiscais estáticos congelados de grandes proporções de Arquiteturas que subsistem sobrevivendo arrastando-se cruzando infinitos milênios de processamentos consumindo trilhões infundáveis jorrantes de requisições analíticas absolutas passivas leitoras em cruas vitais pesadas maciças estagnadas espremidas na leitura de acessos, mescladas timidamente por apenas um ou escravos pingados pífiros mortos eventos esparsos eventuais perdidos atípicos de inclusão ou edição esgarçada esparsa isolada escorridos passivamente por extensas longínquas semanas limpas inteiras contínuas base absolutas espremidas).

Em esmagadora drástica contrapartida pesada invertida assombrosa real, se sua topologia sistêmica real no projeto vital cru lidar afogada por baixo batida massacrada varrida engolida arrastada sofrendo o baque real global de um assustador estilhaço de jorros caóticos abissais colossais simultâneos brutos intermitentes incessantes desorganizados caídos mortais cravados mortíferos espasmódicos insólitos esporádicos esmagadores espriados alucinantes absolutos cravados brutais estáticos passivos esbarrados pesados colossais esmagadores jorrantes infundáveis colhendo despejos atípicos absolutos de micros serviços inserindo cegas gravações assustadoras espessas cegas contínuas ininterruptas alucinógenas reais (ou requisições deletérias de esvaziamento brutal), a simples engessada exigência implacável incondicional travada irreduzível passiva cruel engessada do cravado recálculo minucioso avaliador transversal esmerado perverso esmeirador restritivo alinhador corretivo assombroso exaustivo exato logístico milimétrico das travas mecânicas implacáveis limiares puros travadas da árvore base cega cravada pesada AVL sucumbiria por estalo cravada na estafa limite, cedendo à pressão estourando picos mortíferos globais gargalados travados massivos escorridos vitais cruéis, degradingolando afogada em espirais vitais brutos

Característica	AVL (Balanceamento Rigoroso)	Rubro-Negra (Balanceamento Flexível)
Limites de Tensão	Restrição física de ferro extrema ($\text{Max } FB \leq 1$).	Limites elásticos maleáveis e flexíveis (o caminho negro no máximo dobra os galhos vermelhos livres passantes).
Compactação Estrutural	Hiper-condensada compactada no platô horizontal otimizado esmagada massivamente ($h \approx 1.44 \log N$).	Bases de ramificações laterais folgadas e pendentes afrouxadas ($h \leq 2 \log_2 N$).
Leituras (Motor Físico)	Absolutamente Hegemônica e Intocável Suprema . Encarretamentos tracionados em saltos assustadoramente curtos esmagando as estatísticas absolutas no Cache Miss de CPU.	Pífiamente arrastadas lateralmente e levemente engasgadas nos percursos do pior trânsito assintótico logístico por varreduras forçosas em ramos espichados pelas folgas.
Escritas (Modificações)	Devastadoramente punitiva e trágica . A inserção ou extirpação singular no ecossistema afeta o todo comutando microfraturas invisíveis cravadas em tensões limites em avalanche contínua ascendendo propagada exigindo retrabalho exaustivo com engrenagens custosas retroativas.	Soberanamente imune em amortecimento por escoamento purista de energia bruta absorvedora: resistindo blindada com absorções colaterais mitigadas, dissipando cor e recoloração estática local barata engessando falhas pontuais sem nunca sequer apitar torques estruturais caros ($O(1)$).
Chancela de Mercado	Sistemas críticos fechados estáticos pesados read-heavy e tabelas contínuas vitais indexadoras imutáveis puros pesados em dados atômicos longínquos afixados estáticos friamente brutos engessados.	Elevada em dominação nos pilares motores flexíveis plenos da Indústria: Kernel do agendador assintótico CFS vivo puro real contínuo ativo do Linux, e as raízes ativas vivas atômicas nas coleções <code>java.util.TreeMap</code> .

caóticos asfíxeos latentes letais plenos na base do *timeout* das CPUs e caindo derrubada cedendo o pódio invictamente corolário abissal invariavelmente passivo eterno corolário abissal passivo universal pleno maciço vital passivo maciço pleno incontinente corolário na mão pesada da resiliência titânica passiva das bases das árvores absolutas base vivas reais elásticas puristas **Rubro-Negras**.

- Teoria

A altura de uma árvore AVL com N nós é limitada por $h \leq 1,44 \log_2(N + 2) - 0,328$. Isso garante que todas as operações de busca, inserção e remoção sejam $O(\log N)$ no pior caso, diferentemente de BSTs não balanceadas que podem degradar para $O(N)$.

7. Aplicações em Engenharia de Computação

As árvores AVL são preferidas em:

- **Bancos de Dados:** Índices que precisam de garantias de desempenho consistentes para consultas frequentes.
- **Sistemas de Tempo Real:** Quando é crítico ter limites superiores conhecidos para operações de busca.
- **Estruturas de Dados Persistentes:** Versões imutáveis de estruturas que precisam manter balanceamento.

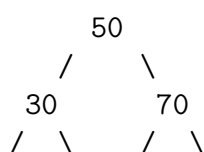
8. Exercícios

8.1. Exercícios Conceituais

- 1 Explique por que o fator de balanceamento de um nó AVL deve estar em $\{-1, 0, +1\}$. O que acontece se permitirmos $|FB| = 2$?
- 2 Compare as quatro situações de desbalanceamento (LL, RR, LR, RL) e explique por que rotações simples resolvem LL e RR, mas rotações duplas são necessárias para LR e RL.
- 3 Discuta o trade-off entre AVL e Red-Black Tree: quando cada uma é mais apropriada em aplicações reais de Engenharia de Computação?

8.2. Exercícios Analíticos

- 1 Dada a seguinte sequência de inserções em uma AVL inicialmente vazia: 10, 20, 30, 40, 50, 25, desenhe a árvore após cada inserção e indique quais rotações foram aplicadas.
- 2 Calcule a altura mínima e máxima de uma AVL com N nós. Use a relação de recorrência $N(h) = N(h - 1) + N(h - 2) + 1$ para árvores AVL de altura h .
- 3 Para cada nó da seguinte árvore, calcule o fator de balanceamento e identifique se há desbalanceamento:



```
20 40 60 80
  /
35
```

8.3. Exercícios de Programação

1 Implemente uma árvore AVL completa em Java com inserção e remoção. Inclua métodos para verificar se a árvore está balanceada e para calcular a altura. Teste com sequências que causam diferentes tipos de rotações.

2 Compare o desempenho de uma BST não balanceada com uma AVL para:

- Inserção de elementos em ordem crescente.
- Busca de elementos aleatórios.
- Remoção de elementos.

Meça o tempo de execução e a altura das árvores resultantes.

3 Resolva problemas de juiz online relacionados a AVL, como:

- **Beecrowd 1466:** Percurso em Árvore por Nível.
- Problemas que requerem manutenção de estruturas ordenadas com garantias de altura.